

Стохастические системы

© 2024 г. А.В. БОСОВ, д-р техн. наук (AVosov@frccsc.ru)
(Федеральный исследовательский центр
«Информатика и управление» РАН, Москва)

ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ПОДВОДНОГО АППАРАТА ПО НАБЛЮДЕНИЯМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ¹

Модель стохастической системы наблюдения, учитывающая случайные временные задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием движущегося объекта, адаптирована для решения задачи идентификации параметров движения. Приведены уравнения для оптимальной байесовской идентификации. Для практического решения к задаче применен условно-минимаксный нелинейный фильтр (УМНФ). Подробно обсуждается синтез УМНФ, включая выбор структуры фильтра, на примере задачи позиционирования автономного подводного аппарата по наблюдениям стационарных акустических маяков. Выполнен вычислительный эксперимент на близкой к практическим потребностям модели с использованием трех вариантов фильтра – типовой аппроксимации обновляющего процесса, метода линейных псевдонаблюдений и геометрической интерпретации результатов угловых измерений.

Ключевые слова: нелинейная стохастическая система наблюдения, идентификация параметров, наблюдения со случайными запаздываниями, условно-минимаксный нелинейный фильтр, позиционирование, акустические сенсоры, линейные псевдонаблюдения.

DOI: 10.31857/S0005231024120026, EDN: XUMKVA

1. Введение

Теория стохастической фильтрации обеспечивает методами и алгоритмами решения разнообразные прикладные задачи оценивания и управления движущимися объектами [1]. В свою очередь, приложения могут оказаться источниками новых постановок, моделей, критериев, стимулируя совершенствование и развитие теории. Такова прикладная область автономных подводных аппаратов (ПА) [2]. Особенности водной среды влияют не только на характер и цели движения, но и на средства выполнения измерений. Так, для решения задачи позиционирования ПА могут использоваться разные измерительные

¹ Работа выполнена с использованием инфраструктуры Центра коллективного пользования «Высокопроизводительные вычисления и большие данные» (ЦКП «Информатика» ФИЦ ИУ РАН, Москва).

средства [3], но все они строятся на общих физических законах. Это акустические сенсоры, а значит, на их работу влияет множество факторов: от температуры до солености и давления воды [4]. Один из результатов этого влияния – случайная задержка поступления данных о состоянии наблюдаемого ПА. Этот фактор никак не учитывается в аналогичной задаче навигации летательных аппаратов (ЛА), поскольку высокая скорость распространения радиоволн позволяет им пренебречь. Действительно, модели систем радиолокационного наблюдения предполагают получение в текущий момент времени данных о текущем положении ЛА. Но скорость распространения акустической волны не столь высока, задержка может оказаться довольно большой, что не позволяет пренебречь ей. Модель стохастической динамической системы наблюдения, которая учитывает фактор задержки акустического сигнала, предложена в [5] и дополнена в [6]. Формально эта модель может быть приведена к унифицированному виду нелинейной стохастической системы наблюдения, что позволяет записать для нее соотношения оптимальной байесовской фильтрации [7] и применять известные эвристические методы фильтрации, включая расширенный фильтр Калмана [8], фильтры частиц [9] и различные варианты сигма-точечных фильтров [10]. Но и оптимальный фильтр, и любые эвристические оценки практически применить не получается даже на модельных примерах, потому что фактор случайной временной задержки между поступившим наблюдением и фактическим состоянием движущегося объекта компенсируется расширением вектора состояния на величину, пропорциональную времени задержки и частоте измерений. В условиях, близких к реальным, получаются гигантские размерности, перспективы борьбы с которыми отсутствуют. Единственный эффективный инструмент, чтобы справиться с задержками, дает метод условно-оптимальной фильтрации Пугачева [11, 12] и его развитие – условно-минимаксный фильтр (УМНФ) Панкова [13]. Это подтверждено расчетами, выполненными в [5, 6]. Продолжая исследовать УМНФ в модели с временными задержками, в этой статье внимание акцентируется на двух вопросах. Во-первых, качество условно-оптимальной фильтрации во многом определяется обоснованным выбором структуры фильтра. Универсальные рекомендации [14] могут сильно проигрывать решениям, которые учитывают специфику задачи. Это показано, в частности, в [5, 6], где фильтр удается синтезировать, опираясь на простую геометрическую интерпретацию измерений. Эта же идея в статье применяется не к упрощенному модельному примеру, а к имеющему реальное прикладное содержание примеру и показывает также хорошие результаты. Однако такой вариант измерений, который позволяет непосредственно определять положение, решая геометрическую задачу, все-таки надо признать ограниченным, и нужен более универсальный подход. Такой подход использует идею метода линейных псевдонаблюдений, предложенного в [15] и успешно развитого в [16]. Представленным в статье результатам в этой части посвящен раздел 4, включающий модель стохастической системы наблюдения, описывающей процесс позиционирования ПА по данным угловых измерений двух акустических маяков, и ва-

рианты выбора структуры УМНФ, учитывающие физический смысл задачи. На этом примере показано, как можно использовать угловые измерения для улучшения точности позиционирования и как при этом учитывать временные задержки наблюдений, порожденные водной средой. Вторым вопросом является традиционный для стохастических систем наблюдения предположения о том, что модель состояния движущего объекта известна. На практике в полном объеме это предположение не выполняется, а модели используются с теми или иными ошибками. Компенсировать влияние этих ошибок можно, если включать их модель в уравнения состояния. Большое число задач и методов такого рода создано в теории робастного оценивания [17]. Другой вариант – описывать неточности модели параметрами, оценивать их и использовать вместе с решением основной задачи фильтрации. Вне зависимости от того, возможно ли это и будут ли оцениваться эти параметры заранее или одновременно с оцениванием текущего положения объекта, соответствующие методы относятся к теории идентификации [18]. Довольно естественным представляется объединять задачи фильтрации и идентификации, формируя модель системы наблюдения в рамках байесовского подхода. Именно такой вариант использования УМНФ с приложением к задаче позиционирования ПА реализуется далее. Формальная модель стохастической системы со случайными временными задержками наблюдений и неизвестными параметрами модели состояния приведена в разделе 2. Для байесовской идентификации параметров в разделе 3 адаптированы уравнения оптимальной фильтрации, полученные ранее в [5, 6], а также уравнения для параметров УМНФ, которые используются для позиционирования в численном эксперименте. Параллельно с позиционированием решается задача идентификации неизвестных параметров движения, определяющих среднюю постоянную скорость ПА. Это позволяет оценить влияние результатов идентификации модели движения на качество решения основной задачи позиционирования, а также в условиях использования только угловых измерений положения – принципиальную возможность оценивания скорости движения без ее непосредственного измерения, обеспечиваемого, например, доплеровскими сенсорами.

2. Модель идентификации параметров движения по наблюдениям со случайными задержками

Движение ПА и комплекс измерений описываются дискретной стохастической динамической системой с неизвестными параметрами. Предполагается, что априорно задана величина T максимальной возможной временной задержки поступающих наблюдений. Поскольку можно считать известной скорость звука в воде, это предположение сводится к оценке максимального расстояния между измерителями и ПА, что не должно представлять затруднения. Обозначая начальный момент позиционирования $t = 0$, для дискретной переменной времени t имеем $t = -T, -T + 1, \dots, 0, 1, \dots$

Положение ПА, задаваемое вектором $x_t = (x_{1t}, \dots, x_{pt})' \in \mathbb{R}^p$, например, координатами $(x(t), y(t), z(t))'$ и скоростями $(v_x(t), v_y(t), v_z(t))'$ в инерциальной системе отсчета, связанной с землей, и случайный вектор неизвестных параметров модели движения $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)' \in \mathbb{R}^r$ образуют вектор состояния динамической системы $(x_t', \mu')' \in \mathbb{R}^{p+r}$. Здесь и далее «'» используется для обозначения транспонированного вектора или матрицы. Предполагается, что распределение μ задано.

Вектор наблюдений $y_t = (y_{1t}, \dots, y_{qt})' \in \mathbb{R}^q$ формируется измерениями, содержащими аддитивные погрешности и временные задержки. Каждому элементу наблюдений y_{it} отвечает свое смещение, заданное дискретной случайной величиной τ_{it} со значениями во множестве $\{0, 1, \dots, T\}$. Величины τ_{it} объединены в вектор $\tau_t = (\tau_{1t}, \dots, \tau_{qt})' \in \mathbb{R}^q$, который является функцией x_t . Именно, предполагается, что каждый элемент наблюдений y_{it} – это измерение, выполненное для положения $x_{t-\tau_{it}}$. Таким образом, система наблюдения имеет вид:

$$(1) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}, \mu) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ y_{it} &= \psi_{it}(x_{t-\tau_{it}}) + v_{it}, & i &= 1, \dots, q, \\ \tau_t &= \theta_t(x_t), \end{aligned}$$

где $w_t = (w_{1t}, \dots, w_{pt})' \in \mathbb{R}^p$ – векторный дискретный белый шум, моделирующий возмущения, $\eta \in \mathbb{R}^p$ – начальные условия, $v_t = (v_{1t}, \dots, v_{qt})' \in \mathbb{R}^q$ – векторный дискретный белый шум, моделирующий ошибки измерений, векторы η , μ , w_t , v_t независимы в совокупности, известные функции φ_t , ψ_t и θ_t удовлетворяют достаточным условиям существования оценок фильтрации, байесовской и условно-минимаксной. Это типовые условия, гарантирующие существование вторых моментов у векторов состояния и наблюдения, например линейный рост функций системы на бесконечности и наличие вторых моментов у возмущений и ошибок наблюдений (см. теоремы 1 и 2 из [5]).

В модели (1) можно ввести составной вектор состояния, который включает как координаты ПА, так и неизвестные случайные параметры модели движения: $(x_t', \mu_t')'$. Тогда модель системы наблюдения получается в виде

$$(2) \quad \begin{aligned} x_t &= \varphi_t(x_{t-1}, \mu_{t-1}) + w_t, & x_{-T-1} &= \eta, \\ \mu_t &= \mu_{t-1}, & \mu_{-T-1} &= \mu, \\ y_t &= \psi_t(x_{t-\tau_t}) + v_t, & \tau_t &= \theta_t(x_t). \end{aligned}$$

Чтобы модель (2) была корректной и могла использоваться в качестве формального представления (1), надо уточнить, что под обозначением $x_{t-\tau_t}$ понимается вектор $(x'_{1t-\tau_{1t}}, \dots, x'_{pt-\tau_{qt}})'$, составленный из положений ПА, отвечающих временной задержке каждого измерения, входящего в вектор наблюдений y_t .

Для вектора начальных условий $(\eta', \mu')'$ в соответствии с байесовской интерпретацией задачи идентификации требуется указать плотность вероятно-

сти, которая может быть записана в виде

$$(3) \quad f_0(X_{-T-1}, M) = f_\eta(X_{-T-1}) f_\mu(M),$$

где $X_{-T-1} \in \mathbb{R}^p$ и $M \in \mathbb{R}^r$ – аргументы плотностей вероятности, соответствующие случайным векторам η и μ , которые выше предполагаются независимыми.

Теперь для записанной системы наблюдения (2) может быть поставлена задача фильтрации, т.е. оценивания состояния $(x'_t, \mu'_t)'$ по наблюдениям $y^t = (y'_0, \dots, y'_t)'$. По ходу решения задачи фильтрации для составного вектора состояния, получается решение как задачи позиционирования, т.е. оценки текущего положения x_t , так и задачи идентификации параметров, т.е. оценки вектора μ .

3. Алгоритмы фильтрации

Заметим, что в поставленной задаче может быть записан оптимальный байесовский фильтр в виде рекуррентных соотношений для апостериорной плотности вероятности. Аналогичные соотношения хорошо известны для традиционных (без задержек) дискретных систем наблюдения [19], а их обобщение на случай временных задержек выполнено в [7]. Нетрудно видеть, что этот же результат имеет место и в решаемой задаче. Фильтр записывается для расширенного вектора положения $\mathbf{x}_t = (x'_{t-T}, \dots, x'_{t-1}, x'_t)'$, поскольку требуется учитывать все возможные временные задержки. Для менее громоздкой записи упростим модель временных задержек, предположив, что вместо вектора $\tau_t \in \mathbb{R}^q$ имеется скалярная величина $\tau_t \in \mathbb{R}^1$. Так получается в частном случае $\tau_{1t} = \dots = \tau_{qt}$. Это значит, что все наблюдатели располагаются на примерно одинаковом расстоянии от ПА, например, когда измерительный комплекс один.

Можно записать апостериорную плотность вероятности $\rho_t = \rho_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)$ вектора $(\mathbf{x}'_t, \mu'_t)'$ относительно вектора всех наблюдений y^t и оценки фильтрации положения x_t^* и параметров μ_t^* . Для этого удобно обозначать аргументы апостериорной плотности через $\mathbf{X}_t = (X'_{t-T}, \dots, X'_{t-1}, X'_t)'$, $M = (M_1, \dots, M_r)'$ и $Y^t = (Y'_0, \dots, Y'_t)'$. Они соответствуют векторам \mathbf{x}_t , μ и y^t . Кроме того, будем использовать ненормированную апостериорную плотность $\hat{\rho}_t = \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)$, так что

$$\rho_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) = \frac{\hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t)}{\int \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) d\mathbf{X}_t dM}.$$

Тогда можно записать [7]:

$$(4) \quad \hat{\rho}_t(\mathbf{X}_t, M|Y^t) = f_{w_t}(X_t - \varphi_t(X_{t-1}, M)) \times \sum_{i=0}^T I(\theta_t(X_t) = i) f_{v_t}(Y_t - \psi_t(X_{t-i})) \int \rho_{t-1} dX_{t-1},$$

где $f_{w_t}(\cdot)$ – плотность вероятности возмущений w_t , $f_{v_t}(\cdot)$ – плотность вероятности ошибок наблюдений. Уравнение (4) решается с начальным условием

$$\begin{aligned} \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}, M | Y^{-1}) &= \rho_{-1}(\mathbf{X}_{-1}, M) = \rho_{-1}(X_{-T-1}, \dots, X_{-1}, M) = \\ &= f_0(X_{-T-1}, M) f_{w_{-T}}(X_{-T} - \varphi_{-T}(X_{-T-1}, M)) \dots \\ &\dots f_{w_{-1}}(X_{-1} - \varphi_{-1}(X_{-2}, M)). \end{aligned}$$

Байесовские оценки x_t^* и μ_t^* получаются интегрированием

$$((\mathbf{x}_t^*)', (\mu_t^*)')' = \int (\mathbf{X}_t', M')' \rho_t(\mathbf{X}_t, M | Y^t) d\mathbf{X}_t dM, \quad \mathbf{x}_t^* = (\dots, (x_t^*)')'.$$

В последнем равенстве указывается на то, что оценка текущего положения x_t^* входит последним подвектором в \mathbf{x}_t^* , оценки прошлых положений ПА также приходится вычислять, хотя они не нужны.

Главный вывод из этих рассуждений состоит в том, что хотя принципиальная возможность получить оптимальные оценки фильтрации и байесовской идентификации имеются, рассчитывать на их практическое применение нельзя. Реализовывать расчет по формуле (4) в рассматриваемой далее модели позиционирования ПА пришлось бы для размерностей $p = 3$, $r = 3$, $q = 4$ и $T = 15$, что дает размерность вектора \mathbf{X}_t , равную 45. Рассчитывать на успех в вычислении интегралов для таких размерностей с хорошей точностью в режиме реального поступления наблюдений y_t представляется как минимум опрометчивым.

Таким образом, нужен иной подход к фильтрации, который позволит получить пусть и не оптимальную оценку, но обладающую хорошей точностью и практически реализуемую. Среди множества известных подходов к субоптимальной фильтрации учесть специфику модели случайных запаздываний наблюдений без внесения кардинальных изменений позволяет концепция условно-оптимальной фильтрации [11, 12]. Изначально предусматриваемая этой концепцией возможность гибко изменять структуру фильтра, учитывая особенности конкретной системы наблюдения, в рассматриваемой постановке позволит учесть как временные запаздывания, так и физические законы, определяющие и движение ПА, и работу измерителей. Минимаксное объяснение свойств этого фильтра вместе с идеей вычислять его параметры приближенно методом имитационного моделирования [13] дают основания для получения оценок хорошего качества как в задаче позиционирования, так и в задаче идентификации параметров движения, при том что реализуемость алгоритмов с разумными затратами вычислительных ресурсов является его неотъемлемым свойством.

Следуя [13] и учитывая используемые в статье обозначения, запишем оценку УМНФ $((\hat{x}_t)', (\hat{\mu}_t*)')'$ положения x_t и случайных параметров модели движения μ по наблюдениям y^t в форме прогноз–коррекция

$$\hat{x}_t = \tilde{x}_t + \Delta \hat{x}_t, \quad \hat{\mu}_t = \hat{\mu}_{t-1} + \Delta \hat{\mu}_t.$$

Для вычисления прогноза положения \tilde{x}_t используется базовая прогнозирующая функция $\xi_t(X, M)$, для вычисления коррекции – базовая корректирующая функция $\zeta_t(X, Y)$, $X \in \mathbb{R}^p$, $M \in \mathbb{R}^r$, $Y \in \mathbb{R}^q$. Прогноз \tilde{x}_t вычисляется как функция от $\xi_t = \xi_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{\mu}_{t-1})$, коррекция $(\Delta\hat{x}'_t, \Delta\hat{\mu}'_t)'$ – как функция от $\zeta_t = \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t)$. Отметим, что в коррекции не используется оценка параметров $\hat{\mu}_{t-1}$ (нет аргумента M), что объясняется отсутствием параметров в функции наблюдений.

Функции, реализующие \tilde{x}_t и $\Delta\hat{x}_t$, выбираются линейными, так что

$$(5) \quad \begin{aligned} \tilde{x}_t &= F_t \xi_t(\hat{x}_{t-1}, \hat{\mu}_{t-1}) + f_t, \\ \begin{pmatrix} \hat{x}_t \\ \hat{\mu}_t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix} + H_t \zeta_t(\tilde{x}_t, y_t) + h_t, \end{aligned}$$

где

$$(6) \quad \begin{aligned} F_t &= \text{cov}(x_t, \xi_t) \text{cov}^+(\xi_t, \xi_t), \quad f_t = \text{E}\{x_t\} - F_t \text{E}\{\xi_t\}, \\ H_t &= \text{cov}\left(\begin{pmatrix} x_t \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix}, \zeta_t\right) \text{cov}^+(\zeta_t, \zeta_t), \quad h_t = -H_t \text{E}\{\zeta_t\}. \end{aligned}$$

В (6) использованы обозначения: $\text{E}\{x\}$ – математическое ожидание случайного вектора x , $\text{cov}(x, y)$ – ковариация x и y , « $+$ » – операция псевдообращения по Муру–Пенроузу [20]. При этом прогноз положения \tilde{x}_t , оценки \hat{x}_t и $\hat{\mu}_t$ являются несмещенными с ковариациями ошибок оценивания

$$(7) \quad \begin{aligned} \tilde{K}_t &= \text{cov}(x_t - \tilde{x}_t, x_t - \tilde{x}_t) = \text{cov}(x_t, x_t) - F_t \text{cov}(\xi_t, x_t), \\ \hat{K}_t^x &= \text{cov}(x_t - \hat{x}_t, x_t - \hat{x}_t) = \tilde{K}_t - \Delta\hat{K}_t^x, \quad \tilde{K}_0 = \text{cov}(\eta, \eta), \\ \hat{K}_t^\mu &= \text{cov}(\mu - \hat{\mu}_t, \mu - \hat{\mu}_t) = \hat{K}_{t-1}^\mu - \Delta\hat{K}_t^\mu, \quad \tilde{K}_0 = \text{cov}(\mu, \mu), \end{aligned}$$

где матрицы $\Delta\hat{K}_t^x$ и $\Delta\hat{K}_t^\mu$ – верхний и нижний диагональные блоки матрицы $H_t \text{cov}\left(\zeta_t, \begin{pmatrix} x_t \\ \mu \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{x}_t \\ \hat{\mu}_{t-1} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \Delta\hat{K}_t^x & \dots \\ \dots & \Delta\hat{K}_t^\mu \end{pmatrix}$.

Линейные преобразования (5) базовых прогноза ξ_t и коррекции ζ_t имеют минимаксное обоснование как наилучшие оценки на классах всех вероятностных распределений с известным средним и ковариацией [13]. Аналитические вычисления коэффициентов F_t , f_t , H_t и h_t фильтра в практических расчетах заменяются оценками Монте-Карло, т.е. вместо $\text{E}\{x\}$ в (6) подставляются $\bar{\text{E}}\{x\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$, где $\{x_i\}_{i=1}^N$ – выборочные значения x , смоделированные на компьютере. Наконец, достаточные условия существования оценки (5) применительно к модели (2) сформулированы в [5, 6].

Таким образом, для решения задачи позиционирования ПА требуется указать конкретные условия движения и наблюдения и синтезировать УМНФ, выбрав базовые прогноз ξ_t и коррекцию ζ_t .

4. Позиционирование автономного ПА с использованием стационарных акустических маяков

4.1. Модель движения

Как уже упоминалось, целевой и на данный момент единственной областью приложения рассматриваемой модели системы со случайными временными задержками наблюдений является передвижение объекта в водной среде. Именно вода выступает естественным источником запаздываний измерений, которые выполняются различными акустическими сенсорами. С использованием таких измерений можно ставить разные задачи, в том числе целеполагание и интеллектуальное отслеживание целей, оценивание и прогнозирование положения аппарата, идентификация модели движения, планирование перемещений отдельного ПА и группы, инерциальная навигация и визуальное позиционирование и др. Для демонстрации гибкости и эффективности УМНФ выбрана задача позиционирования автономного ПА, взаимодействующего с двумя стационарными акустическими маяками. Модель наблюдений и возможные подходы к решению задачи оценивания в этой постановке в деталях рассматривались в [21–23]. Здесь эта модель дополнена определением случайных временных задержек для измерений каждого маяка и отсутствием точной априорной информации о параметрах движения, а именно о векторе средней скорости движения ПА. Анализировать, таким образом, можно как результаты стандартного применения УМНФ для решения задачи фильтрации состояния – определения положения ПА, так и позиционирования совместно с идентификацией параметров.

Модель движения ПА исходит из предположения, что в среднем аппарат двигается с постоянной скоростью, на реальную скорость оказывают влияние неконтролируемые случайные факторы. Их воздействие приводит к независимым отклонениям скорости, которая остается постоянной на интервалах дискретизации (между очередными измерениями) и изменяется в каждый следующий такт времени. Такое же движение в плоскости использовано в [5], но в предположении, что параметры движения известны. Здесь же они будут идентифицироваться.

Движение ПА описывается в декартовой системе координат $Oxyz$, выбор которой обсуждается ниже. Для координат траектории движения используются типовые обозначения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, единицей измерений этих величин принимаются километры (км). Надо обратить внимание на отличие этих обозначений от x_t , y_t , использованных выше для системы наблюдения в общей модели (1). Позиционирование ПА начинается в момент времени $t = 0$ и выполняется в дискретные моменты времени с шагом δ сек: $\delta, 2\delta, \dots, t\delta, \dots$. Движение ПА начинается в момент времени $-T\delta$, т.е. $t = -T$, чтобы в момент $t = 0$ могло реализоваться измерение с любой допустимой задержкой $\tau_{0i} \leq T$, поэтому начальное положение ПА задается вектором $(x(-T - 1), y(-T - 1), x(-T - 1))'$. В выполненных расчетах предполагается, что этот вектор имеет нормальное распределение со средним $(-1, -1, 1)'$ и

ковариацией $\text{diag}\{0,1^2; 0,1^2; 0,1^2\}$. Предполагается, что ПА движется с неизвестной постоянной скоростью $(v_x, v_y, v_z)'$, на которую оказывают влияние неконтролируемые факторы. Отсутствие точной информации о скорости моделируется предположением о том, что вектор $(v_x, v_y, v_z)'$ является гауссовским со средним $E\{v_x\} = -25$ км/ч, $E\{v_y\} = -12,5$ км/ч, $E\{v_z\} = -1$ км/ч и ковариацией $\text{diag}\{5^2, 5^2, 1\}$. Таким образом, на каждой траектории есть свое «целевое» движение (направление и скорость) и наряду с позиционированием, т.е. оценением положения $(x(t), y(t), z(t))'$, требуется идентифицировать параметры этого движения, заданные реализацией вектора $(v_x, v_y, v_z)'$.

Неконтролируемые случайные факторы, влияющие на скорость движения, моделируются аддитивными возмущениями $w_x(t)$, $w_y(t)$ и $w_z(t)$, и предполагается, что вектор $(w_x(t), w_y(t), w_z(t))'$ имеет нормальное распределение со средним $(0, 0, 0)'$ и ковариацией $\text{diag}\{25^2, 25^2, 25^2\}$. Таким образом, имеем вектор состояния $(x'_t, \mu'_t) = (x(t), y(t), z(t), v_x, v_y, v_z) \in \mathbb{R}^{3+3}$ и следующую динамику:

$$(8) \quad \begin{cases} x(t) = x(t-1) + \delta(v_x + w_x(t)), \\ y(t) = y(t-1) + \delta(v_y + w_y(t)), \\ z(t) = z(t-1) + \delta(v_z + w_z(t)), \\ t = -T, -T+1, \dots, 0, 1, \dots \end{cases}$$

Для остальных параметров расчета, как в [5], задается шаг дискретизации наблюдений $\delta = 0,0001$ часа (ч), т.е. порядка трех измерений в секунду (с), позиционирование выполняется для 1000 шагов дискретизации, $t = -T, \dots, 1000$, т.е. 6 минут (мин) движения. За это время ПА в среднем перемещается на расстояние порядка 2,5–3 км, при этом максимальная дальность до более удаленного из двух маяков может достигать 8 км. Соответственно, величина максимальной временной задержки полагается равной $T = 15$, т.е. составляет 0,0015 ч или 5,4 с. Это предположение сделано исходя из скорости звука в воде $v_s = 5400$ км/ч (1500 м/с).

4.2. Модель измерительного комплекса

Функции наблюдателей выполняют два стационарных акустических маяка (пассивное акустическое устройство для оценки направления движения, direction of arrival, DOA) [24], установленных заранее. Если обозначить координаты первого (\mathcal{F} , *first*) маяка $(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}})$ и координаты второго (\mathcal{S} , *second*) – $(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}})$, то следуя модели, предложенной в [22], наблюдения за позиционируемым ПА с неизвестными координатами (X, Y, Z) представляют собой направления на каждый из маяков, которые дают два угла

$$(9) \quad \begin{cases} \tan \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{Y_{\mathcal{F}} - Y}{X_{\mathcal{F}} - X}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{Y_{\mathcal{S}} - Y}{X_{\mathcal{S}} - X}, \\ \tan \lambda_{\mathcal{F}} = \frac{Z_{\mathcal{F}} - Z}{|X_{\mathcal{F}} - X|} \cos \varphi_{\mathcal{F}}, & \tan \lambda_{\mathcal{S}} = \frac{Z_{\mathcal{S}} - Z}{|X_{\mathcal{S}} - X|} \cos \varphi_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

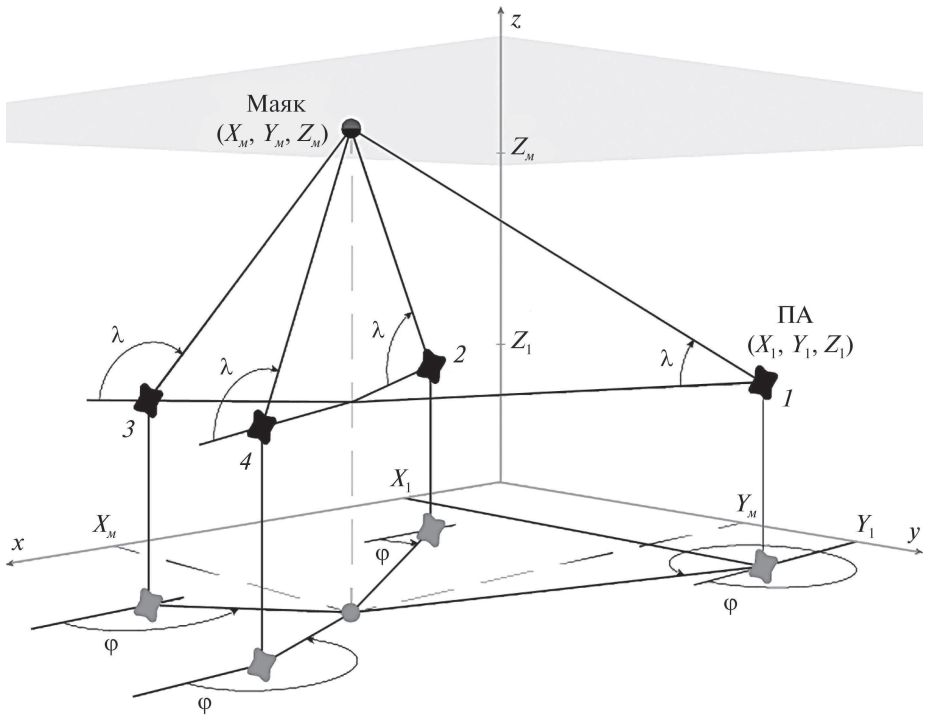


Рис. 1. Схема возможного расположения ПА и маяков.

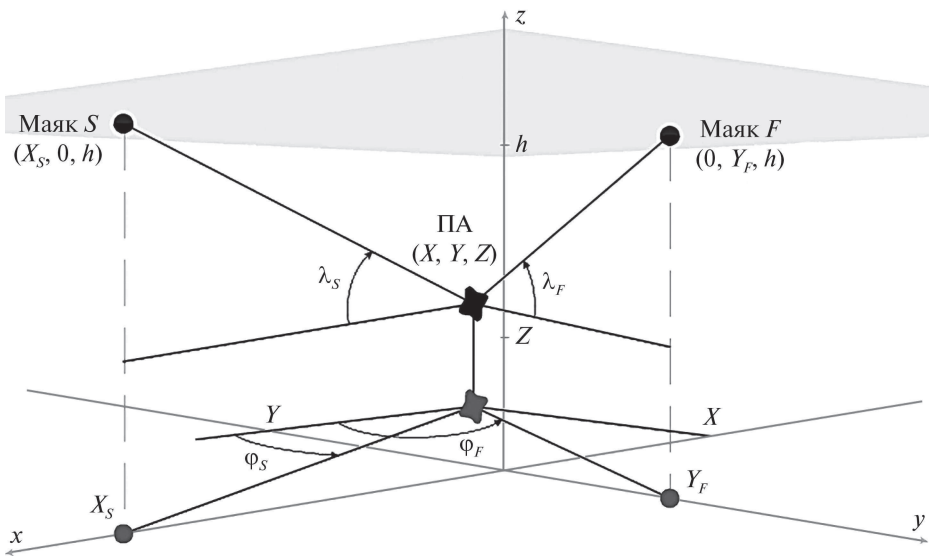


Рис. 2. Схема взаимного расположения ПА и двух маяков в эксперименте.

Геометрическая интерпретация измеряемых углов приведена на рис. 1, где показано, как можно отсчитывать углы φ_F , φ_S , λ_F , λ_S для определения взаимного расположения маяка и позиционируемого ПА, чтобы по имеющимся измерениям тангенсов правильно определять положение аппарата и

учитывать возможное пересечение им линий $X_{\mathcal{F}} - X = 0$ и $X_{\mathcal{S}} - X = 0$, когда часть измерений использовать нельзя. На рисунке положения 1-2-3-4 ПА (X_1, Y_1, Z_1) и маяка $(X_{\mathcal{M}}, Y_{\mathcal{M}}, Z_{\mathcal{M}})$ отвечают возможным комбинациям координат $X_1 < X_{\mathcal{M}}, X_1 > X_{\mathcal{M}}, Y_1 < Y_{\mathcal{M}}, Y_1 > Y_{\mathcal{M}}$, и отсчеты φ и λ выполнены так, чтобы (9) имело место во всех вариантах.

В описанном далее эксперименте с учетом предполагаемого кооперативного сценария, когда маяки и ПА действуют совместно для решения общей задачи, имеется возможность немного упростить соотношения, выбрав систему координат так, чтобы $(X_{\mathcal{F}}, Y_{\mathcal{F}}, Z_{\mathcal{F}}) = (0, Y_{\mathcal{F}}, h)$ и $(X_{\mathcal{S}}, Y_{\mathcal{S}}, Z_{\mathcal{S}}) = (X_{\mathcal{S}}, 0, h)$, где h – глубина в месте расположения маяков (рис. 2). Также можно считать, что $X_{\mathcal{F}} > 0, Y_{\mathcal{F}} > 0$, а начало координат расположено так, что выполняются условия $X < 0, Y < 0$ на протяжении всего периода движения. Тогда все измеряемые углы $\varphi_{\mathcal{F}}, \varphi_{\mathcal{S}}, \lambda_{\mathcal{F}}, \lambda_{\mathcal{S}}$ будут изменяться в диапазоне $(0, \frac{\pi}{2})$, так что $\cos \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}})^{1/2}}$ и $\cos \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}})^{1/2}}$. Таким образом, вместо (9) измерения связываются соотношениями

$$(10) \quad \begin{cases} \tan \varphi_{\mathcal{F}} = \frac{Y - Y_{\mathcal{F}}}{X}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}} = \frac{Y}{X - X_{\mathcal{S}}}, \\ \tan \lambda_{\mathcal{F}} = \frac{Z - h}{X} \cos \varphi_{\mathcal{F}}, & \tan \lambda_{\mathcal{S}} = \frac{Z - h}{X - X_{\mathcal{S}}} \cos \varphi_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

В выполненных расчетах координаты маяков определяются значениями $Y_{\mathcal{F}} = 1$ км и $X_{\mathcal{S}} = 2$ км, глубина $h = 2$ км. Соответственно, выбранные выше ожидаемое начальное положение ПА $(-1, -1, 1)'$ и средняя скорость $(-25; -12,5; -1)'$ означают, что в среднем в течение 6 мин позиционирования ПА будет двигаться, удаляясь от обоих маяков и сохраняя отрицательные координаты $x(t), y(t)$ и положительную $z(t)$. Увеличение расстояния от измерителей означает, что будут увеличиваться и значения, принимаемые временной задержкой τ_t .

В (10) остается, таким образом, учесть ошибки измерений. Они согласно модели (1) предполагаются аддитивными, так что фактическая модель измерительного комплекса без учета временных задержек в поступлении наблюдений имеет вид

$$(11) \quad \begin{cases} y_{1t} = \frac{y(t) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t)} + v_1(t), & y_{2t} = \frac{z(t) - h}{x(t)} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} + v_2(t), \\ y_{3t} = \frac{y(t)}{x(t) - X_{\mathcal{S}}} + v_3(t), & y_{4t} = \frac{z(t) - h}{x(t) - X_{\mathcal{S}}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} + v_4(t), \\ \tan \varphi_{\mathcal{F}}(t) = \frac{y(t) - Y_{\mathcal{F}}}{x(t)}, & \tan \varphi_{\mathcal{S}}(t) = \frac{y(t)}{x(t) - X_{\mathcal{S}}}, \end{cases}$$

где $y_t = (y_{1t}, y_{2t}, y_{3t}, y_{4t})'$ – вектор измеренных угловых направлений $\tan \varphi_{\mathcal{F}}, \tan \lambda_{\mathcal{F}}, \tan \varphi_{\mathcal{S}}, \tan \lambda_{\mathcal{S}}$, координаты положения ПА $x(t), y(t), z(t)$ задаются моделью (8), а вектор $(v_1(t), v_2(t), v_3(t), v_4(t))'$ аддитивных ошибок измерения имеет нормальное распределение со средним $(0, 0, 0, 0)'$ и ковариацией

$\text{diag} \{(0, 01)^2, (0, 01)^2, (0, 01)^2, (0, 01)^2\}$. В описываемом эксперименте точностные характеристики моделируемых акустических сенсоров подобраны так, чтобы можно было визуализировать отличия в оценках, сохранив приемлемое качество всех алгоритмов. Источником относительно точности реальных устройств может служить работа [25].

Для учета в (11) задержек наблюдений τ_t определим две случайные функции $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{\mathcal{S}}(t)$, которые будут моделировать задержку акустического сигнала в тактах времени, т.е. в шагах дискретизации δ , в уже упомянутом предположении постоянной скорости звука v_s . Отметим, что для рассматриваемой задачи этого упрощенного предположения достаточно. На практике его без особого труда можно заменить на более точное соотношение, например на значение, вычисленное согласно алгоритму [26] или другим более простым аппроксимациям [27]. Зная текущее положение ПА $(x(t), y(t), z(t))'$, вычисляем дальности до маяков, расположенных в точках $(0, Y_{\mathcal{F}}, h)$ и $(X_{\mathcal{S}}, 0, h)$, и задержки $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{\mathcal{S}}(t) \in \{0, 1, \dots, T\}$ в единицах времени модели движения (8)

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_{\mathcal{F}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t))^2 + (y(t) - Y_{\mathcal{F}})^2 + (z(t) - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}, \\ \tau_{\mathcal{S}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(x(t) - X_{\mathcal{S}})^2 + (y(t))^2 + (z(t) - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}. \end{array} \right.$$

В (12) использовано обозначение $[x]$ для целой части числа x и минимум, чтобы задержки формально соответствовали модели (1) и не превышали заданный порог T . В расчетах $T = 15$ выбрано достаточно большим, так что это ограничение по минимуму на смоделированных траекториях ни разу не срабатывало.

Итак, окончательная модель наблюдений принимает вид

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} y_{1t} = \frac{x_{2t - \tau_{\mathcal{F}}(t)} - Y_{\mathcal{F}}}{x_{1t - \tau_{\mathcal{F}}(t)}} + v_1(t), \\ y_{2t} = \frac{x_{3t - \tau_{\mathcal{F}}(t)} - h}{x_{1t - \tau_{\mathcal{F}}(t)}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t - \tau_{\mathcal{F}}(t)))^{1/2}} + v_2(t), \\ y_{3t} = \frac{x_{2t - \tau_{\mathcal{S}}(t)}}{x_{1t - \tau_{\mathcal{S}}(t)} - X_{\mathcal{S}}} + v_3(t), \\ y_{4t} = \frac{x_{3t - \tau_{\mathcal{S}}(t)} - h}{x_{1t - \tau_{\mathcal{S}}(t)}} \frac{1}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t - \tau_{\mathcal{S}}(t)))^{1/2}} + v_4(t), \\ \tan \varphi_{\mathcal{F}}(t) = \frac{x_{2t} - Y_{\mathcal{F}}}{x_{1t}}, \quad \tan \varphi_{\mathcal{S}}(t) = \frac{x_{2t}}{x_{1t} - X_{\mathcal{S}}}. \end{array} \right.$$

Для приведения времени запаздывания в (13) к виду исходной модели (1), в которой $\tau_t \in \mathbb{R}^4$, надо использовать (12) и положить $\tau_{1t} = \tau_{2t} = \tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{3t} = \tau_{4t} = \tau_{\mathcal{S}}(t)$.

4.3. Синтез УМНФ

Синтез фильтра состоит в выборе его структурных функций ξ_t , ζ_t и проведении компьютерного моделирования для расчета коэффициентов по формулам (6) и определения точности по формулам (7). Для простоты далее не вводятся отдельные обозначения для оценок УМНФ, отвечающих разным вариантам структурных функций, все оценки обозначаются одинаково: \hat{x}_t , $\hat{\mu}_t$ и прогнозы \tilde{x}_t . Какую именно структуру имеет фильтр, определяет его наименование (типовой, геометрический, псевдонаблюдений).

Все три предлагаемых варианта фильтра используют базовый прогноз в силу системы (8), т.е. $\xi_t \in \mathbb{R}^3$, $t = 0, 1, \dots$, и имеет вид

$$(14) \quad \xi_{1t} = X_1 + \delta M_1, \quad \xi_{2t} = X_2 + \delta M_2, \quad \xi_{3t} = X_3 + \delta M_3.$$

Уравнения движения (8) линейные, что не меняет наличие подлежащих идентификации параметров, так что базовый прогноз (14) используется во всех вариантах УМНФ и обсуждать имеет смысл только коррекцию.

В первом варианте фильтра, названным «*типовым*», базовую коррекцию задает невязка наблюдений, скорректированная на оценку времени задержки наблюдений, т.е. $\zeta_t \in \mathbb{R}^4$, $t = 0, 1, \dots$, и имеет вид

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = Y_1 - \frac{X_2 - Y_{\mathcal{F}}}{X_1}, \quad \zeta_{2t} = Y_2 - \frac{X_3 - h}{X_1} \frac{1}{(1 + \tan^2 \tilde{\varphi}_{\mathcal{F}})^{1/2}}, \\ \tan \tilde{\varphi}_{\mathcal{F}} = \frac{X_2 - Y_{\mathcal{F}}}{X_1}, \quad (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ \zeta_{3t} = Y_3 - \frac{X_2}{X_1 - X_{\mathcal{S}}}, \quad \zeta_{4t} = Y_4 - \frac{X_3 - h}{X_1} \frac{1}{(1 + \tan^2 \tilde{\varphi}_{\mathcal{S}})^{1/2}}, \\ \tan \tilde{\varphi}_{\mathcal{S}} = \frac{X_2}{X_1 - X_{\mathcal{S}}}, \quad (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}, \\ \hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(X_1)^2 + (X_2 - Y_{\mathcal{F}})^2 + (X_3 - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_t, \\ \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t) = \min \left\{ T, \left[\frac{\sqrt{(X_1 - X_{\mathcal{S}})^2 + (X_2)^2 + (X_3 - h)^2}}{(\delta v_s)} \right] \right\}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_t. \end{array} \right.$$

Обратим внимание, что для формирования такой невязки аргумент базовой коррекции ζ_t , отвечающий за прогноз, должен содержать не только последний, вычисленный согласно (5), прогноз положения \tilde{x}_t , но и все предыдущие $\tilde{x}_{t-1}, \dots, \tilde{x}_{t-T}$, поскольку оценки временных задержек $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ в (15) могут принять любые значения от 0 до T . Сдвиг прогноза нужен,

чтобы считать невязку от оценки того состояния, которому отвечает текущее наблюдение y_t , т.е. от «запаздывающего» состояния, величину которого можно оценить значениями $\widehat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\widehat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ соответственно для первой и второй пары измеряемых углов. При этом сами оценки задержек можно вычислять, используя прогноз текущего положения \tilde{x}_t , поскольку скорость ПА много меньше скорости звука, так что дальность до ПА за время «доставки» измерения, а значит и само это время, существенно не изменится.

Второй вариант коррекции УМНФ использует идею метода «псевдонаблюдений» [15]. Подход состоит в следующем. Можно заметить, что из исходных геометрических соотношений (10) соотношения для измеряемых углов легко преобразуются в линейные комбинации определяемых координат:

$$\begin{cases} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{\tan \varphi_{\mathcal{F}}} = \frac{Y}{\tan \varphi_{\mathcal{F}}} - X, & h \frac{\cos \varphi_{\mathcal{F}}}{\tan \lambda_{\mathcal{F}}} = Z \frac{\cos \varphi_{\mathcal{F}}}{\tan \lambda_{\mathcal{F}}} - X, \\ X_{\mathcal{S}} \tan \varphi_{\mathcal{S}} = X \tan \varphi_{\mathcal{S}} - Y, & h \cos \varphi_{\mathcal{S}} - X_{\mathcal{S}} \tan \lambda_{\mathcal{S}} = Z \cos \varphi_{\mathcal{S}} - X \tan \lambda_{\mathcal{S}}. \end{cases}$$

Такие же преобразования применительно к (11) дают

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{y_{1t}} = \frac{y(t)}{y_{1t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{1t}} v_1(t), \\ \frac{h}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} \frac{z(t)}{y_{2t}} = \frac{z(t)}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{F}}(t))^{1/2}} \frac{z(t)}{y_{2t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{2t}} v_2(t), \\ X_{\mathcal{S}} y_{3t} = x(t) y_{3t} - y(t) - (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_3(t), \\ \frac{h}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} - X_{\mathcal{S}} y_{4t} = \\ = \frac{z(t)}{(1 + \tan^2 \varphi_{\mathcal{S}}(t))^{1/2}} - x(t) y_{4t} + (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_4(t). \end{array} \right.$$

Наконец, вместо $\tan \varphi_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tan \varphi_{\mathcal{S}}(t)$ в (16), точные значения которых неизвестны, нужно подставить соответствующие измерения y_{1t} и y_{3t} и заменить точные соотношения (16) приближенными:

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{Y_{\mathcal{F}}}{y_{1t}} = \frac{y(t)}{y_{1t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{1t}} v_1(t), \\ \frac{h}{(1 + (y_{1t})^2)^{1/2}} \frac{z(t)}{y_{2t}} = \frac{z(t)}{(1 + (y_{1t})^2)^{1/2}} \frac{z(t)}{y_{2t}} - x(t) + \frac{x(t)}{y_{2t}} v_2(t), \\ X_{\mathcal{S}} y_{3t} = x(t) y_{3t} - y(t) - (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_3(t), \\ \frac{h}{(1 + (y_{3t})^2)^{1/2}} - X_{\mathcal{S}} y_{4t} = \\ = \frac{z(t)}{(1 + (y_{3t})^2)^{1/2}} - x(t) y_{4t} + (x(t) - X_{\mathcal{S}}) v_4(t). \end{array} \right.$$

Следуя методу псевдонаблюдений, для записи фильтра надо использовать систему (17), в частности левые части – как новые наблюдения. Это объясняется тем, что в правых частях присутствуют линейные комбинации оцениваемого положения $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, что позволяет надеяться на хорошую работу субоптимальных фильтров калмановской структуры, прежде всего расширенного фильтра Калмана (РФК) [8]. Это действительно очень привлекательное свойство, поскольку при записи РФК не придется вычислять производные функций измерителя (ψ_t в модели (1)).

Для синтезируемого УМНФ этот подход дает базовую коррекцию в форме невязки наблюдений (17), т.е. $\zeta_t \in \mathbb{R}^4$ вида

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = \frac{Y_{\mathcal{F}}}{Y_1} - \frac{X_2}{Y_1} + X_1, \quad \zeta_{2t} = \frac{h - X_3}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}} + X_1, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ \zeta_{3t} = X_{\mathcal{S}}Y_3 - X_1Y_3 + X_2, \quad \zeta_{4t} = \frac{h - X_3}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}} - X_{\mathcal{S}}Y_4 + X_1Y_4, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}. \end{array} \right.$$

В отличие от корректирующего члена обычного РФК в окончательном виде ζ_t в (18) учтены, как в коррекции (15) типового УМНФ, задержки наблюдений такими же оценками $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$.

Наконец, третья структура для УМНФ определяется из геометрических соображений, и соответствующая коррекция называется «геометрическая». Снова используем (10) в предположении отсутствия ошибок измерений. Эти соотношения можно интерпретировать как четыре совместных уравнения для определения трех координат ПА X , Y , Z . Хотя геометрическая задача на рис. 1 имеет одно решение (гарантированно пересекающиеся линии акустических лучей двух маяков), формально систему (10) можно решить четырьмя способами. Объединив измеряемые обоими маяками величины в вектор $(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)' = (\tan \varphi_{\mathcal{F}}, \tan \lambda_{\mathcal{F}}, \tan \varphi_{\mathcal{S}}, \tan \lambda_{\mathcal{S}})'$, получаем из (10) систему

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_1 = \frac{Y - Y_{\mathcal{F}}}{X}, \quad Y_2 = \frac{Z - h}{X} \frac{1}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}}, \\ Y_3 = \frac{Y}{X - X_{\mathcal{S}}}, \quad Y_4 = \frac{Z - h}{X - X_{\mathcal{S}}} \frac{1}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}} \end{array} \right.$$

с решением X, Y, Z , удовлетворяющим каждому из следующих двенадцати равенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ Y = \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ Z = h + Y_2 \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} \left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ Y = \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ Z = h + Y_4 \left(\frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} - X_{\mathcal{S}} \right) \left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \\ Y = \frac{Y_1 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}} + Y_{\mathcal{F}}, \\ Z = h + \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\frac{Y_4}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}}}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} X = \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1 + (Y_1)^2}{1 + (Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \\ Y = \frac{Y_2 Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 \left(\frac{1 + (Y_3)^2}{1 + (Y_1)^2} \right)^{1/2} - Y_2}, \\ Z = h + \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\frac{Y_4}{(1 + (Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1 + (Y_3)^2)^{1/2}}}. \end{array} \right.$$

Исключая отсюда одинаковые, в итоге из четырех измерений Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 получаем восемь равенств, которые можно использовать в качестве базовой

коррекции УМНФ $\zeta_t \in \mathbb{R}^8$ вида

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \zeta_{1t} = X_1 - \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1}, \\ \zeta_{3t} = X_3 - h - Y_2 \frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} \left(1 + (Y_1)^2\right)^{1/2}, \\ \zeta_{2t} = X_2 - \frac{Y_3 (Y_{\mathcal{F}} + Y_1 X_{\mathcal{S}})}{Y_3 - Y_1}, \\ \zeta_{4t} = X_3 - h - Y_4 \left(\frac{Y_{\mathcal{F}} + Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_3 - Y_1} - X_{\mathcal{S}} \right) \left(1 + (Y_3)^2\right)^{1/2}, \\ \zeta_{5t} = X_1 - \frac{Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1+(Y_1)^2}{1+(Y_3)^2} \right)^{1/2}}, \quad \zeta_{7t} = X_2 - \frac{Y_2 Y_3 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 \left(\frac{1+(Y_3)^2}{1+(Y_1)^2} \right)^{1/2} - Y_2}, \\ \zeta_{6t} = X_2 - \frac{Y_1 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{Y_4 - Y_2 \left(\frac{1+(Y_1)^2}{1+(Y_3)^2} \right)^{1/2}} - Y_{\mathcal{F}}, \\ \zeta_{8t} = X_3 - h - \frac{Y_2 Y_4 X_{\mathcal{S}}}{\left(\frac{Y_4}{(1+(Y_1)^2)^{1/2}} - \frac{Y_2}{(1+(Y_3)^2)^{1/2}} \right)}, \\ (X_1, X_2, X_3)' = \tilde{x}_{t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))}, \quad Y_{1(2)} = y_{1(2)t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))+\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)}, \\ Y_{3(4)} = y_{3(4)t-\max(\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t), \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t))+\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)}. \end{array} \right.$$

Здесь оценки временных задержек $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ и $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$ вычисляются так же, как и в предыдущих двух вариантах коррекции, но используются несколько сложнее. Поскольку геометрическая интерпретация «смешала» измерения от разных маяков, то «смешались» и задержки, так что сдвигать назад следует и прогноз, и измерения так, чтобы они относились к одному и тому же моменту времени. Для прогноза – это сдвиг на большую из величин $\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t)$ или $\hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)$, для наблюдений – сдвиг на разницу $|\hat{\tau}_{\mathcal{F}}(t) - \hat{\tau}_{\mathcal{S}}(t)|$ в сторону более раннего измерения (надо напомнить, что измерения y_{it} в (19) уже сдвинуты на $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ или $\tau_{\mathcal{S}}(t)$ согласно модели (13)). Таким образом, текущие, самые «свежие» наблюдения будут использоваться только наполовину. Этот «ущерб» нанесен в интересах синхронизации измерений. На самом деле, конечно, никакого ущерба нет, поскольку неиспользованная часть наблюдений будет задействована очень быстро по истечении времени рассинхронизации $|\tau_{\mathcal{F}}(t) - \tau_{\mathcal{S}}(t)|$.

В случае роста числа маяков, т.е. при использовании трех, четырех и т.д. акустических сенсоров, число уравнений (19) растет в геометрической прогрессии. Так что формальное масштабирование геометрической коррекции на большее число наблюдателей может вместо потенциального улучшения качества позиционирования, привести к неприемлемым издержкам из-за сложности реализации. Однако можно предполагать, что нет необходимости использовать все возможные комбинации измерений и можно ограничиться только частью. Целесообразно будет при этом использовать все имеющиеся сенсоры,

и не столь важно, какие именно пары задействовать в коррекции. Косвенно подтверждает это успех фильтра псевдонаблюдений, продемонстрированный в следующем разделе. Но все-таки, несмотря на простоту геометрической задачи, именно геометрический вариант коррекции дает возможность сформировать наилучшую структуру УМНФ для решения задачи позиционирования ПА.

5. Численные эксперименты

Для синтеза УМНФ методом Монте-Карло и анализа его качества моделировалось два независимых пучка по $N = 10\,000$ траекторий. На первом пучке рассчитывались параметры фильтра (6) и (7) каждой из трех предложенных структур коррекции. Обратим внимание, что хотя непосредственно соотношения (7) для вычисления оценки фильтрации не требуются, значения \hat{K}_t полезно знать, так как они имеют смысл теоретической точности фильтра. На втором пучке анализировалось реальное качество оценки фильтрации $\hat{x}_t = (\hat{x}(t), \hat{y}(t), \hat{z}(t))'$ и оценки идентификации $\hat{\mu}_t = (\hat{v}_x(t), \hat{v}_y(t), \hat{v}_z(t))'$. Точность оценивания определялась средними квадратическими отклонениями ошибок оценок, обозначенными соответственно как $\sigma_{\hat{x}}(t)$, $\sigma_{\hat{y}}(t)$, $\sigma_{\hat{z}}(t)$ (на рисунках указываются в метрах) и $\sigma_{\hat{v}_x}(t)$, $\sigma_{\hat{v}_y}(t)$, $\sigma_{\hat{v}_z}(t)$ (км/ч) и вычисленными также по методу Монте-Карло, но уже на втором пучке. Таким образом, смотреть

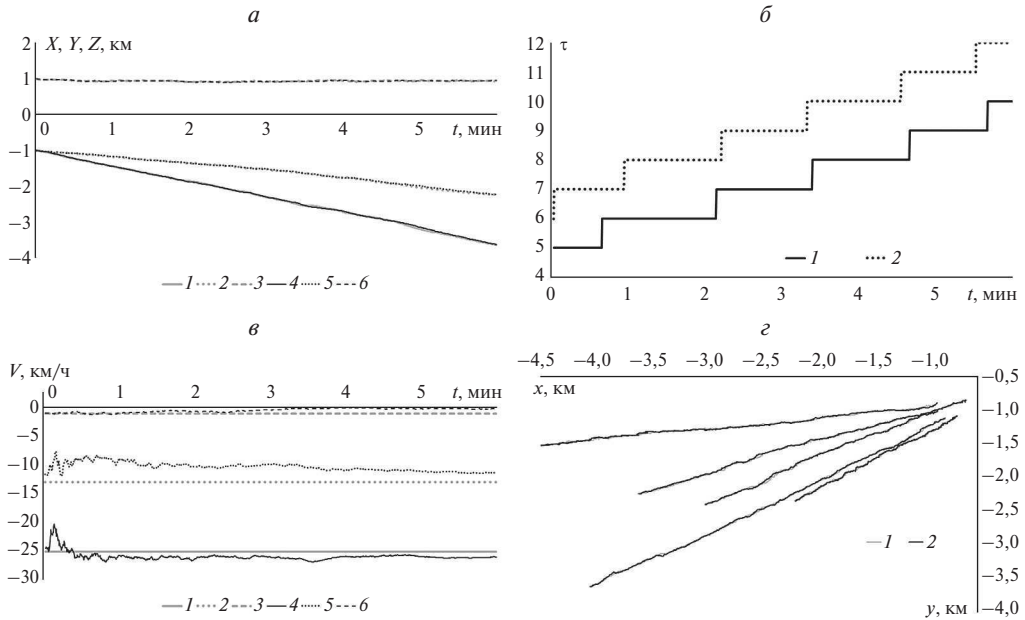


Рис. 3. Типовые траектории ПА: а – положение 1 – $x(t)$, 2 – $y(t)$, 3 – $z(t)$, оценка 4 – $\hat{x}(t)$, 5 – $\hat{y}(t)$, 6 – $\hat{z}(t)$; б – временные задержки 1 – $\tau_F(t)$, 2 – $\tau_S(t)$; в – скорости 1 – v_x , 2 – v_y , 3 – v_z , оценки 4 – $\hat{v}_x(t)$, 5 – $\hat{v}_y(t)$, 6 – $\hat{v}_z(t)$; г – положение ПА и оценки на траекториях 1 – $(x(t), y(t))$, 2 – $(\hat{x}(t), \hat{y}(t))$.

нужно как на абсолютные значения этих величин (в том числе сравнивая их с рассчитанными в модели без учета временных задержек), так и на разницу между ними и соответствующими диагональными элементами \widehat{K}_t , чтобы оценить, насколько теоретические свойства УМНФ реализуются на практике при использовании для синтеза компьютерного моделирования.

На рис. 3 эксперимент иллюстрируется примерами характерных траекторий положения, временной задержки, оценок фильтрации и идентификации параметров. На рис. 3,а на одном графике приведены координаты одной траектории ПА $x(t), y(t), z(t)$ и соответствующей оценки УМНФ $\widehat{x}(t), \widehat{y}(t), \widehat{z}(t)$; на рис. 3,б – временные задержки $\tau_{\mathcal{F}}(t)$ и $\tau_{\mathcal{S}}(t)$ для первого и второго маяков на той же траектории ПА; на рис. 3,в – оценки $\widehat{v}_x(t), \widehat{v}_y(t), \widehat{v}_z(t)$ и точные значения скоростей v_x, v_y, v_z ; на рис. 3,г – несколько траекторий движения ПА даны в проекции на плоскость Oxy . Оценки УМНФ отвечают геометрической структурной функции. Но хотя разница в оценках фильтрации и идентификации для разных структур УМНФ есть, визуализировать ее на графиках невозможно. Поэтому для анализа результативности далее в большей степени привлекается числовой материал.

Следующий вопрос – точность оценивания – иллюстрируют рис. 4 и 5. На рис. 4,а–в представлены отклонения $\sigma_{\widehat{x}}(t), \sigma_{\widehat{y}}(t), \sigma_{\widehat{z}}(t)$ и для сравнения соответствующие диагональные элементы теоретической ковариации ошибки оценки \widehat{K}_t . На рис. 5,а–в приведены аналогичные характеристики $\sigma_{\widehat{v}_x}(t), \sigma_{\widehat{v}_y}(t), \sigma_{\widehat{v}_z}(t)$ для идентифицируемых скоростей. На каждом рисунке по три графика, соответствующих трем вариантам УМНФ – геометрическому, псевдонаблюдений и типовому.

Оценивая эти графики визуально, можно констатировать, что первые два варианта УМНФ успешно справляются с задачей позиционирования. Для точного сравнения нужны числовые показатели, которые приводятся далее. Также можно констатировать принципиальную возможность идентификации скоростей, продемонстрированную этими же фильтрами. Величины, характеризующие качество идентификации, приведены ниже. Очевидна неспособность типового фильтра ни позиционировать ПА, ни идентифицировать среднюю скорость движения. Расхождение между теоретической точностью, определяемой матрицей \widehat{K}_t , и реальными величинами отклонений $\sigma_{\widehat{x}}(t), \sigma_{\widehat{y}}(t), \sigma_{\widehat{z}}(t), \sigma_{\widehat{v}_x}(t), \sigma_{\widehat{v}_y}(t), \sigma_{\widehat{v}_z}(t)$, вычисленными на втором пучке, очевидно слишком велико. Причина этого заключается в недостаточном объеме выборки, использованной для синтеза фильтра, и может быть устранена значительным увеличением N . Однако тогда расчеты становятся довольно ресурсоемкими. Вычислительные ресурсы имело бы смысл тратить, если бы не преимущества других двух структур УМНФ, реализовать которые чуть сложнее, но гораздо результативнее.

Завершая эксперимент, нужно ответить на вопросы, охарактеризовав реальную разницу успешных структур УМНФ, влияние на качество оценивания модели с временной задержкой, наличие идентифицируемых параметров.

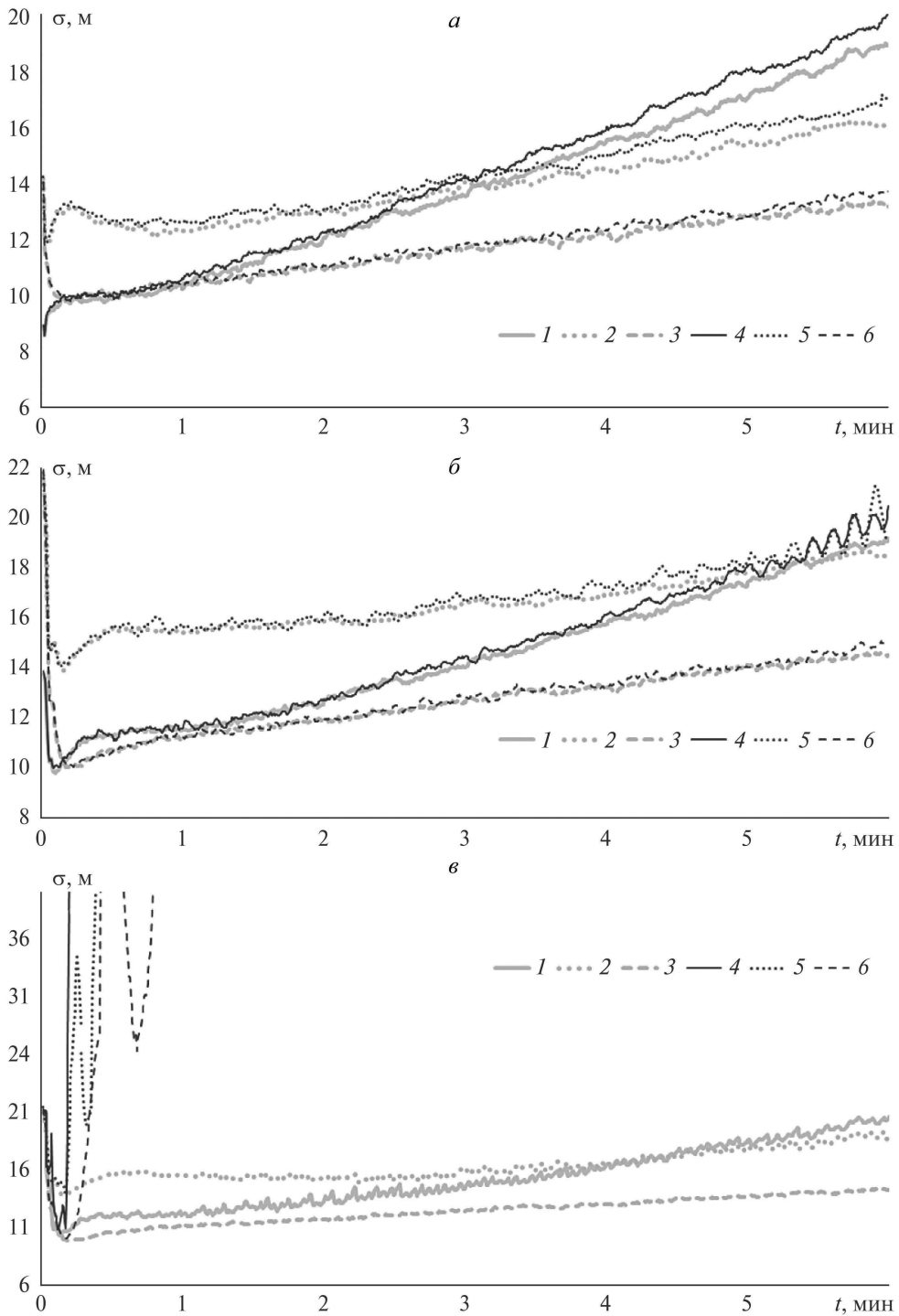


Рис. 4. Среднеквадратические отклонения: 1 - $(\hat{K}_t)_{11}^{1/2}$, 2 - $(\hat{K}_t)_{22}^{1/2}$, 3 - $(\hat{K}_t)_{33}^{1/2}$, 4 - $\sigma_{\hat{x}}(t)$, 5 - $\sigma_{\hat{y}}(t)$, 6 - $\sigma_{\hat{z}}(t)$, фильтры *a* - геометрический, *б* - псевдонаблюдений, *в* - типовой.

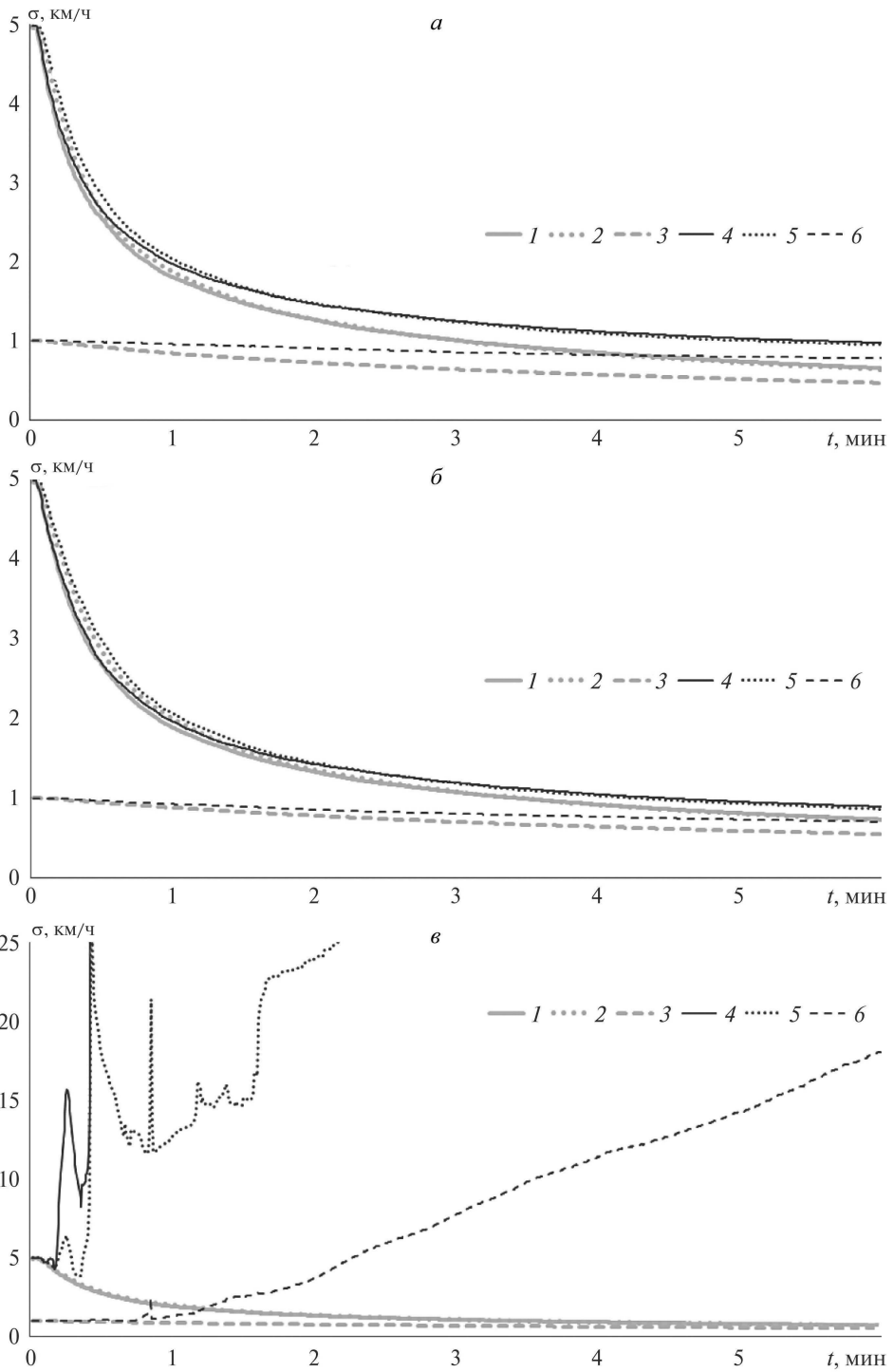


Рис. 5. Среднеквадратические отклонения: 1 - $(\widehat{K}_t)_{44}^{1/2}$, 2 - $(\widehat{K}_t)_{55}^{1/2}$, 3 - $(\widehat{K}_t)_{66}^{1/2}$, 4 - $\sigma_{\widehat{v}_x}(t)$, 5 - $\sigma_{\widehat{v}_y}(t)$, 6 - $\sigma_{\widehat{v}_z}(t)$, фильтры а - геометрический, б - псевдонаблюдений, в - типовой.

Сравнение качества оценивания

Фильтр	$\sigma_{\hat{x}}^{(1)}/\sigma_{\hat{x}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{y}}^{(1)}/\sigma_{\hat{y}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{z}}^{(1)}/\sigma_{\hat{z}}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_x}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_y}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_y}^{(2)}$	$\sigma_{\hat{v}_z}^{(1)}/\sigma_{\hat{v}_z}^{(2)}$
$T = 15$, задержка 54 с, v_x, v_y, v_z неизвестны						
Геометрический	13,80/ 14,22	13,93/ 14,32	11,61/ 11,77	0,68 /0,99	0,67 /0,97	0,49 /0,79
Псевдонаблюдения	14,36/14,60	16,54/16,83	12,60/12,70	0,76/ 0,91	0,75 / 0,89	0,56/ 0,72
Типовой	15,22/ 4300	16,38/ 3368	12,50/ 1117	0,76/ 88	0,75/ 96	0,57/ 17
$T = 0$, задержка 0 с, v_x, v_y, v_z неизвестны						
Геометрический	11,27/11,62	11,45/11,78	8,81/8,92	0,67/1,00	0,66/0,98	0,48/0,80
Псевдонаблюдения	11,19/11,36	11,49/11,65	8,87/8,93	0,75/0,92	0,73/0,89	0,55/0,72
Типовой	11,09 / 11,25	11,45 / 11,61	8,81 / 8,86	0,74 / 0,92	0,73 / 0,89	0,55 / 0,72
$T = 15$, задержка 54 с, $v_x = E\{v_x\}, v_y = E\{v_y\}, v_z = E\{v_z\}$ известны						
Геометрический	13,05/13,23	13,38/13,54	11,48/11,56	-	-	-
Псевдонаблюдения	13,56/13,64	15,38/15,49	12,37/12,42	-	-	-
Типовой	13,66/ 45,81	15,39/ 32,22	12,33/ 22,09	-	-	-
$T = 0$, задержка 0 с, $v_x = E\{v_x\}, v_y = E\{v_y\}, v_z = E\{v_z\}$ известны						
Геометрический	10,66/11,25	11,11/11,25	8,71/8,77	-	-	-
Псевдонаблюдения	10,66/10,74	11,14/11,22	8,74/8,77	-	-	-
Типовой	10,65 / 10,72	11,13 / 11,21	8,71 / 8,75	-	-	-

С этой целью проведены расчеты с моделями, в которых $\tau_{\mathcal{F}}(t) = \tau_{\mathcal{S}}(t) = 0$, и моделями, в которых $v_x = E\{v_x\}$, $v_y = E\{v_y\}$, $v_z = E\{v_z\}$. Если выбор для сравнения модели без временной задержки ясен, то предположение об известной постоянной скорости ПА на каждой траектории может показаться избыточным. На самом деле, если скорости определяются для каждой траектории, как предполагает исходная модель движения (8), существенной разницы между позиционированием с известными в начальный момент скоростями и позиционированием со скоростями – оценками идентификации нет. Причина этому видна на рис. 5, а–б, показывающем, что приемлемая оценка текущей скорости формируется фильтром довольно быстро. Кроме того, модель движения (8) позволяет довольно точно прогнозировать и с использованием средней скорости, а в предположении отсутствия временных задержек скорость вообще не влияет на качество позиционирования, хотя при этом остается возможность ее идентификации.

В качестве объективной оценки качества позиционирования использованы усредненные по времени (1000 шагов, 6 мин) средние отклонения. Например, для анализа $\hat{x}(t)$ вычислены $\sigma_{\hat{x}}^{(2)} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \sigma_{\hat{x}}(t)$ для сравнения с теоретической точностью $\sigma_{\hat{x}}^{(1)} = \frac{1}{1000} \sum_{t=1}^{1000} \left(\hat{K}_t\right)_{11}^{1/2}$. Для анализа результатов идентификации представлены величины $\sigma_{\hat{v}_x}^{(1)} = \frac{1}{100} \sum_{t=901}^{1000} \left(\hat{K}_t\right)_{44}^{1/2}$ и $\sigma_{\hat{v}_x}^{(2)} = \frac{1}{100} \sum_{t=901}^{1000} \sigma_{\hat{v}_x}(t)$ и т.д., т.е. средние отклонения оценок на последней сотне шагов. Здесь индексы (1) и (2) показывают, что отклонение вычислено на первом (теоретическая точность) и втором (фактическая точность) пучке, нижний индекс обозначает оценку. Все результаты объединены в таблице, наиболее интересные, иллюстрирующие самые высокие и самые низкие точности оценок, выделены полужирным шрифтом.

6. Заключение

Дополнение модели со случайными временными запаздываниями [5, 6] неизвестными параметрами, подлежащими идентификации, конечно, усложнило техническую реализацию алгоритмов оценивания. Даже такой надежный подход, который дают концепции условно-оптимальной и условно-минимаксной фильтрации, испытывает определенные сложности. Это первый важный вывод, который можно сделать из результатов, представленных в таблице предыдущего раздела статьи. Типовой фильтр, воспроизводящий структуру фильтра Калмана, по сути, оказывается неработоспособным. Любопытно, что при этом в моделях без запаздываний и фильтр на основе невязки, и фильтры более сложной структуры одинаково хорошо справляются и с позиционированием (оценкой координат положения), и с идентификацией (оценкой скорости). Собственно, при отсутствии временных задержек наблюдений УМНФ работает одинаково с любой структурой и дает очень хорошую точность оценивания.

Второе замечание следует сделать о концепции псевдоизмерений [15]. Тот факт, что этот подход даст работающую структуру для УМНФ в модели с задержками, изначально не представлялся очевидным. Тем более казалась сомнительной его способность конкурировать с чисто геометрическим решением. В результате же получились вполне конкурентные по точности оценки, а в задаче идентификации УМНФ со структурой псевдонаблюдений даже превосходит геометрический фильтр. При этом геометрическое решение можно получить далеко не всегда, а с ростом числа измерителей еще и размерности будут расти в геометрической прогрессии. В то же время концепция линейных псевдонаблюдений носит универсальный характер, она применима к любым сенсорам ДОА, обеспечивающим определение направления движения, и много проще в реализации.

Наконец, третье замечание, касается интерпретации результатов идентификации. С одной стороны, используя метод Монте-Карло, ожидать сходимости оценок в численном эксперименте не приходится. С другой стороны, байесовский подход к оценке параметров и свойства УМНФ не подразумевают сходимости за конечное время, а только гарантируют, что качество оценки будет улучшаться от шага к шагу. Реальное отклонение оценки скоростей оказывается порядка 1 км/ч, что для изначальных 5 км/ч для координат x и y за 6 мин наблюдения представляется хорошим результатом. Скорость по оси Oz оценивается плохо, но она и влияет на точность позиционирования гораздо меньше. Таким образом, принципиальная возможность идентификации скоростей без прямых измерений, например доплеровскими сенсорами, проведенным экспериментом подтверждена. Измерения скорости могут еще повысить точность как идентификации модели движения, так и позиционирования ПА.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bar-Shalom Y., X.-R. Li, Kirubarajan T.* Estimation with Applications to Tracking and Navigation: Theory, Algorithms and Software. John Wiley & Sons, Inc. 2002.
2. *Ehlers F. (Ed.)* Autonomous Underwater Vehicles: Design and Practice (Radar, Sonar & Navigation). London, UK: SciTech Publishing, 2020.
3. *Kebkal K.G., Mashoshin A.I.* AUV acoustic positioning methods // Gyroscopy Navig. 2017. V. 8. P. 80–89.
4. *Christ R.D., Wernli R.L.* The ROV Manual: A User Guide for Remotely Operated Vehicles. 2nd Edition. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 2013.
5. *Босов А.В.* Фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // АИТ. 2023. № 6. С. 49–66.
Bosov A.V. Observation-Based Filtering of State of a Nonlinear Dynamical System with Random Delays // Autom. Remote Control. 2023. V. 84. No. 6. P. 594–605.
6. *Bosov A.* Tracking a Maneuvering Object by Indirect Observations with Random Delays // Drones. 2023. V. 7 (468).

7. *Босов А.В.* Оптимальная фильтрация состояния нелинейной динамической системы по наблюдениям со случайными запаздываниями // Информатика и ее применения. 2023. Т. 17. Вып. 3. С. 8–17.
8. *Bernstein I., Friedland B.* Estimation of the State of a Nonlinear Process in the Presence of Nongaussian Noise and Disturbances // J. Franklin Instit. 1966. V. 281. No. 6. P. 455–480.
9. *Arulampalam S., Maskell S., Gordon N.J., Clapp T.* A Tutorial on Particle Filters for On-line Non-linear/Non-Gaussian Bayesian Tracking // IEEE Trans. Signal Processing, 2002. V. 50. No. 2. P. 174–188.
10. *Julier S.J., Uhlmann J.K., Durrant-Whyte H.F.* A new approach for filtering nonlinear systems // Proc. IEEE Amer. Control Conf. (ACC'95), 1995. P. 1628–1632.
11. *Пугачев В.С.* Рекуррентное оценивание переменных и параметров в стохастических системах, описываемых разностными уравнениями // ДАН СССР. 1978. Т. 243. № 5. С. 1131–1133.
12. *Пугачев В.С.* Оценивание переменных и параметров в дискретных нелинейных системах // АиТ. 1979. № 6. С. 63–79.
Pugachev V.S. Estimation of variables and parameters in discrete-time nonlinear systems // Autom. Remote Control. 1979. V. 40. No. 4. P. 39–50.
13. *Pankov A.R., Bosov A.V.* Conditionally minimax algorithm for nonlinear system state estimation // IEEE Trans. Autom. Control. 1994. V. 39. No. 8. P. 1617–1620.
14. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. 2-е изд. М.: Наука, 1990. Гл. ред. физ.-мат. лит.
Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. Stochastic differential systems—Analysis and filtering. Chichester: Wiley, 1987.
15. *Lin X., Kirubarajan T., Bar-Shalom Y., Maskell S.* Comparison of EKF, pseudo-measurement, and particle filters for a bearing-only target tracking problem // Signal and Data Processing of Small Targets 2002, Proceedings of the AEROSENSE 2002, Orlando, FL, USA, 1–5 April 2002; Drummond, O.E., Ed.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2002. V. 4728. P. 240–250.
16. *Miller A., Miller B.* Stochastic control of light UAV at landing with the aid of bearing-only observations // Proceedings of the Eighth International Conference on Machine Vision (ICMV 2015), Barcelona, Spain, 19–21 November 2015; Verikas, A., Radeva, P., Nikolaev, D., Eds.; International Society for Optics and Photonics, SPIE: Bellingham, WA, USA, 2015. V. 9875. P. 474–483.
17. *Huber P.J., Ronchetti E.M.* Robust Statistics. Wiley Series in Probability and Statistics (2 ed.). Wiley, 2011.
18. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991.
Ljung L. System Identification—Theory For the User. 2 ed. N.J.: PTR Prentice Hall, 1999.
19. *Bertsekas D.P., Shreve S.E.* Stochastic Optimal Control: The Discrete-Time Case. NY: Academic Press, 1978.
20. *Albert A.* Regression and the Moor–Penrose Pseudoinverse. N.Y. Academ.: Academic Press, 1972.
21. *Miller A., Miller B., Miller G.* AUV navigation with seabed acoustic sensing // Proceedings of the 2018 Australian New Zealand Control Conference (ANZCC), Melbourne, VIC, Australia, 7–8 December. 2018. P. 166–171.

22. *Miller A., Miller B., Miller G.* On AUV Control with the Aid of Position Estimation Algorithms Based on Acoustic Seabed Sensing and DOA Measurements. *Sensors* 2019, 19, 5520.
23. *Miller A., Miller B., Miller G.* Navigation of Underwater Drones and Integration of Acoustic Sensing with Onboard Inertial Navigation System // *Drones*. 2021. V. 5 (83).
24. *Hodges R.* Underwater Acoustics: Analysis, Design and Performance of Sonar. N.Y.: Wiley, USA, 2011.
25. *Weirathmueller M., Weber T.C., Schmidt V., McGillicuddy G., Mayer L., Huff L.* Acoustic Positioning and Tracking in Portsmouth Harbor, New Hampshire // *Proc. OCEANS 2007*, Vancouver, BC, Canada, 29 September–4 October, 2007. P. 1–4.
26. *Wong G.S.K., Zhu S.-M.* Speed of sound in seawater as a function of salinity, temperature, and pressure // *J. Acoust. Soc. Am.* 1995. V. 97. P. 1732–1736.
27. *Dushaw B.D., Worcester P.F., Cornuelle B.D., Howe B.M.* On Equations for the Speed of Sound in Seawater // *J. Acoust. Soc. Am.* 1993. V. 93. P. 255–275.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.М. Миллером.

Поступила в редакцию 20.06.2024

После доработки 10.09.2024

Принята к публикации 20.09.2024